UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte II)
Doctorado en ciencias mención matemática

Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. Una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una *similaridad* si

$$\operatorname{dist}(T(p), T(q)) = \lambda \cdot \operatorname{dist}(p, q), \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^2$$

para alguna constante $\lambda > 0$ que depende solo de T, donde "dist" denota la distancia Euclidiana.

(a) Demuestre que para una transformación lineal T no singular las siguientes son equivalentes

i. T preserva ángulos.
ii. T preserva ángulos rectos.
iii. T es una similaridad.

(b) Demuestre que si T es una similaridad, entonces su matriz asociada respecto de la base canónica tiene una de las formas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 \neq 0$

2. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $F = (u, v)\colon U \to \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo en su imagen. Decimos que F es *conforme* si para cualquiera curvas $\gamma, \eta\colon (-1, 1) \to U$ suaves que se intersecten en un punto $p = \gamma(0) = \eta(0) \in U$, entonces

$$\angle\left(\frac{d}{dt}\gamma(0), \frac{d}{dt}\eta(0)\right) = \angle\left(\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(0), \frac{d}{dt}(F \circ \eta)(0)\right)$$

(a) Demuestre que $F = (u, v)$ es conforme si y solamente si las funciones componentes u y v satisfacen uno de los sistemas de EDPs

$$\begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

(b) Considere la aplicación diferenciable $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

i. Si L_1 y L_2 son dos rectas que pasan por el origen, determine el ángulo $\angle(F(L_1), F(L_2))$ en el origen.
ii. Compruebe que F satisface uno de los sistemas anteriores en todo $\mathbb{R}^2$.
iii. ¿Contradice esto el resultado en (2a)? Explique.

3. Sea $f \in C([a,b])$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sea

$$M = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$I_n = \left(\int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n}.$$

Demuestre que $\lim_{n\to\infty} I_n = M$.

4. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}(y)$ el cuerpo de las funciones racionales en la variable y sobre $\mathbb{C}$. Considere los automorfismos de $\mathbb{K}$ dados por

$$\sigma(y) = \frac{y+i}{y-i} \quad ; \quad \tau(y) = i\left(\frac{y-1}{y+1}\right)$$

y $G =< \sigma, \tau > \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$.

   (a) Calcule $| G |$.

   (b) Determine $\mathbb{F} = \mathrm{Fix}(H)$, el cuerpo fijo por H para cada $H \leq G$, donde $\mathrm{Fix}(H) = \{k \in \mathbb{K} : \ h(k) = k, \ \forall h \in H\}$.

5. Sea X un subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ dado por la unión de tres planos distintos (no necesariamente pasando por el origen). Hallar el grupo fundamental de X en cada configuración posible tal que X sea conexo.